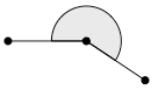
Définitions et théorèmes géométriques

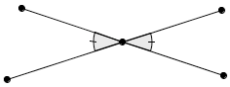
A. Les angles

1. Un **angle nul** mesure 0°.
2. Un **angle aigu** mesure entre 0° et 90°.
3. Un **angle obtus** mesure entre 90° et 180°.
4. Un **angle plat** mesure 180°.

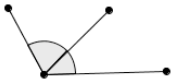
5. Un **angle rentrant** mesure entre 180° et 360°.



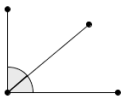
6. Un **angle plein** mesure 360°.
7. Deux angles sont **opposés par le sommet** s'ils ont le même sommet et que les côtés de l'un sont les prolongements de l'autre. Ces angles sont congrus.



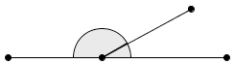
8. Deux angles sont **adjacents** s'ils ont le même sommet, un côté commun et que les deux autres côtés sont situés de part et d'autre de ce côté commun.



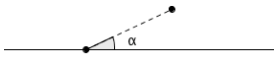
9. Deux angles sont **complémentaires** si la somme de leur mesure est 90°.



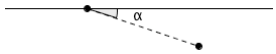
10. Deux angles sont **supplémentaires** si la somme de leur mesure est 180°.



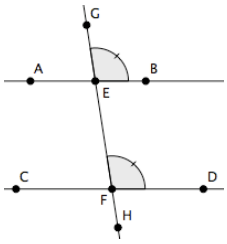
11. La somme des mesures des angles intérieurs d'un **quadrilatère** est 360°.
12. La somme des mesures des angles intérieurs d'un **triangle** est 180°.
13. Un **angle d'élévation** est un angle au-dessus de l'horizontale.



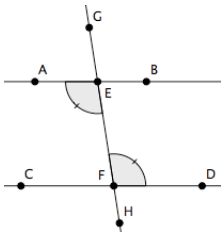
14. Un **angle de dépression** est un angle sous l'horizontale.



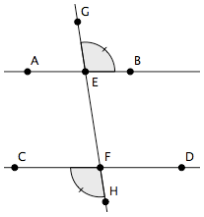
15. Les angles **correspondants** formés par des parallèles et une sécante sont congrus.



16. Les angles **alternes-internes** formés par des parallèles et une sécante sont congrus.



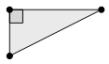
17. Les angles **alternes-externes** formés par des parallèles et une sécante sont congrus.



18. Si deux angles correspondants, alternes-internes ou alternes-externes sont **congrus**, alors ils sont formés par des **droites parallèles**.

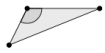
B. Les triangles

19. Si on observe ses angles, un triangle peut être :
    - ✦ **rectangle** (un angle droit);



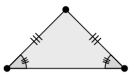
    - ✦ **acutangle** (des angles aigus);

    - ✦ **obtusangle** (un angle obtus).



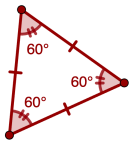
20. Les triangles peuvent aussi se classer suivant leur nombre de **côtés ou d'angles congrus** :
    - ✦ **scalène** (ni côtés, ni angles congrus);

    - ✦ **isocèle** (2 côtés et/ou 2 angles congrus);

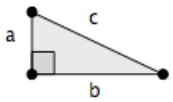


    - ✦ **équilatéral** (3 côtés et/ou 3 angles congrus).

21. Dans tout triangle, la mesure d'un côté quelconque est inférieure à la somme des mesures des deux autres côtés.
22. Dans tout triangle, la mesure d'un côté quelconque est supérieure à la différence des mesures des deux autres côtés.
23. Dans tout triangle, au **plus grand angle** est opposé le plus grand côté.
24. Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont **complémentaires**.
25. Dans un triangle rectangle, le plus long côté se nomme **hypoténuse** et les deux petits, **cathètes**.
26. Dans tout triangle **isocèle**, les angles opposés aux côtés congrus sont congrus et vice-versa.
27. **Le triangle équilatéral**
    - ✦ Tous les angles sont congrus et mesurent 60°.
    - ✦ Tous les côtés sont congrus.
    - ✦ Il possède 3 axes de symétrie supportant chacun une médiane, une médiatrice, une bissectrice et une hauteur.

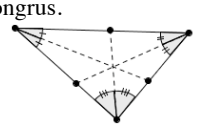


28. **Théorème de Pythagore**
    Dans un triangle rectangle, le carré de la mesure de l'hypoténuse égale la somme des carrés des mesures des cathètes.



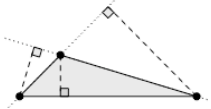
$$a^2 + b^2 = c^2$$

29. Dans un triangle (ou un polygone), les **bissectrices** coupent les angles en deux angles congrus.



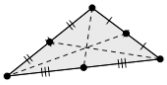
30. Dans un triangle (ou un polygone), les **médiatrices** s'élèvent perpendiculairement sur le milieu de chaque côté.

31. Dans un triangle, les **hauteurs** s'abaissent perpendiculairement d'un sommet sur le côté opposé ou son prolongement.



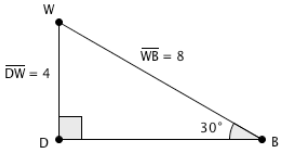
32. Dans un triangle, les **médianes** relient un sommet au milieu du côté opposé.

Par Pascal Tremblay 👈 https://maths.lapagept.com ◆ Dernière mise à jour : mardi 30 juillet 2024

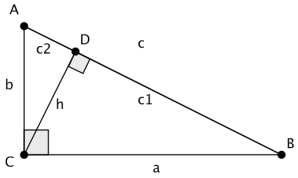


33. L'**axe de symétrie** d'un triangle isocèle supporte une médiane, une médiatrice, une bissectrice et une hauteur de ce triangle.

34. Dans un triangle rectangle, la mesure du côté opposé à un **angle de 30°** est égale à la moitié de celle de l'hypoténuse.



35. Dans un triangle rectangle, si l'on abaisse une hauteur issue du sommet de l'angle droit, on forme trois triangles semblables.



$\triangle$ ABC ~ $\triangle$ ACD ~ $\triangle$ CBD

36. Théorème de la hauteur relative à l'hypoténuse

(voir figure 35)

Dans un triangle rectangle la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les deux segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse.

$$\frac{c_1}{h} = \frac{h}{c_2} \Leftrightarrow h^2 = c_1 \cdot c_2$$

37. Théorème de la projection des cathètes

(voir figure 35)

Dans un triangle rectangle chaque cathète est moyenne proportionnelle entre sa projection sur l'hypoténuse et l'hypoténuse entière.

$$\frac{c_2}{b} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow b^2 = c_2 \cdot c$$
$$\frac{c_1}{a} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a^2 = c_1 \cdot c$$

38. Théorème du produit des cathètes

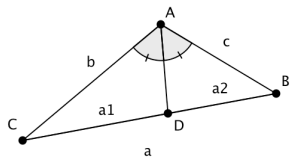
(voir figure 35)

Dans un triangle rectangle le produit des cathètes est égal au produit de l'hypoténuse par la hauteur relative à l'hypoténuse.

$$a \cdot b = h \cdot c$$

39. Théorème de la bissectrice

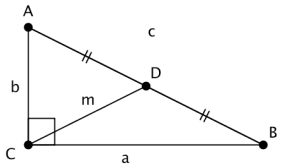
Dans tout triangle, la bissectrice d'un angle divise le côté opposé en deux segments de longueurs proportionnelles à celles des côtés adjacents.



$$\frac{a_1}{b} = \frac{a_2}{c}$$

40. Théorème de la médiane relative à l'hypoténuse

Dans un triangle rectangle, la mesure de la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitié de l'hypoténuse.

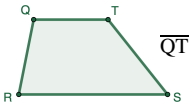


$$m = \frac{c}{2}$$

C. Les polygones

41. Le trapèze

- ✦ Quadrilatère ayant **deux côtés parallèles**.
- ✦ Le parallélogramme, le losange, le rectangle et le carré sont des trapèzes.

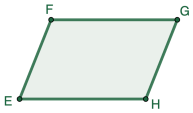


$\overline{QT} \parallel \overline{RS}$

- ✦ Un **trapèze rectangle** a au moins deux angles droits.
- ✦ Un **trapèze isocèle** a ses deux côtés non parallèles isométriques.

42. Le parallélogramme

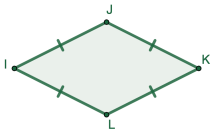
- ✦ Quadrilatère dont les **côtés opposés** sont **parallèles**.
- ✦ Le losange, le rectangle et le carré sont des parallélogrammes.



$\overline{EH} \parallel \overline{FG}$ et $\overline{EF} \parallel \overline{HG}$

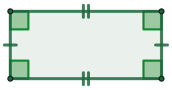
43. Le losange

- ✦ Quadrilatère dont tous les **côtés** sont **isométriques**.
- ✦ Le carré est un losange.



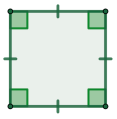
44. Le rectangle

- ✦ Quadrilatère ayant **quatre angles droits** et **deux paires de côtés opposés isométriques**.
- ✦ Le carré est un rectangle.

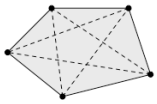


45. Le carré

- ✦ Quadrilatère dont tous les **côtés** sont **isométriques** et tous les **angles** sont **droits**.



46. Dans un polygone, les **diagonales** relient 2 sommets non adjacents.

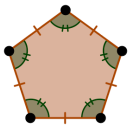


47. Les **polygones** peuvent être nommés selon leur nombre de côtés, c'est-à-dire leur **ordre**.

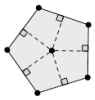
Nb côtés	Nom du polygone
3	triangle
4	quadrilatère
5	pentagone
6	hexagone
7	heptagone
8	octogone
9	ennéagone
10	décagone
11	hendécagone
12	dodécagone
13	tridécagone
14	tétradécagone
15	pentadécagone
16	hexadécagone
17	heptadécagone
18	octadécagone
19	ennéadécagone
20	icosagone

D. Polygones réguliers

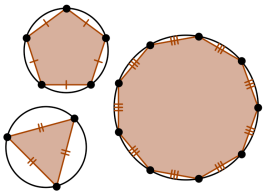
48. Un **polygone régulier** est un polygone dont tous les côtés sont isométriques et tous les angles intérieurs sont isométriques.



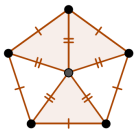
49. L'**apothème** est la perpendiculaire menée du centre d'un polygone régulier sur un de ses côtés.



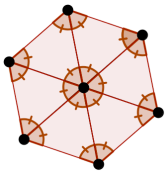
50. Un polygone régulier est **inscriptible** dans un cercle.



51. Tout polygone régulier peut être **décomposé** en autant de triangles isocèles isométriques qu'il a de côtés.

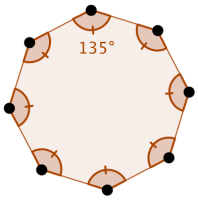


52. Un **hexagone régulier** est composé de six triangles équilatéraux. Tous les angles à l'intérieur de ces triangles mesurent donc 60°.



53. La **somme des mesures des angles intérieurs** d'un polygone régulier à n cotés est de $180 \cdot (n-2)$ degrés.

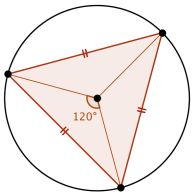
54. La mesure d'un **angle intérieur** dans un polygone régulier à n côtés est de $\dfrac{180 \cdot (n-2)}{n}$ degrés.



Par exemple, dans un octogone régulier, chaque angle intérieur mesure

$$\frac{180 \cdot (8-2)}{8} = \frac{1080}{8} = 135°.$$

55. Dans un polygone régulier à n côtés, l'**angle au centre** mesure $\dfrac{360}{n}$ degrés.



Par exemple, dans un triangle équilatéral, chaque angle au centre mesure

$$\frac{360}{3} = 120°.$$

56. Un polygone régulier à autant d'**axes de symétrie** que de côtés.

E. Le cercle

57. Le contour d'un cercle s'appelle la **circonférence**.

58. Un **secteur** est une partie d'un cercle limitée par 2 rayons.

59. Un **arc** de cercle est une portion de cercle délimitée par deux points du cercle.

60. Dans un cercle, la mesure du **diamètre** vaut le double de celle du rayon.

$$d = 2r$$

61. Dans un cercle, le **diamètre** relie deux points du cercle en passant par le centre.

62. Dans un cercle, le **rayon** est tiré du centre à un point de la circonférence.

F. La trigonométrie

63. Les rapports trigonométriques

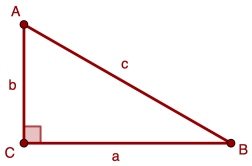
Ils s'appliquent dans les triangles rectangles.

Truc : SOH CAH TOA

$$\sin A = \frac{\text{mesure cathète opposée à } \angle A}{\text{mesure hypoténuse}} = \frac{a}{c}$$

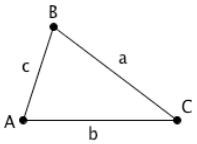
$$\cos A = \frac{\text{mesure cathète adjacente à } \angle A}{\text{mesure hypoténuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{mesure cathète opposée à } \angle A}{\text{mesure cathète adjacente à } \angle A} = \frac{a}{b}$$



64. La loi des sinus

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



65. La loi des cosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

66. Quelques identités trigonométriques

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$
$$\cos A = \sin(90° - A)$$
$$\cos A = {}^{-}\cos(180° - A)$$
$$\cos A = \cos({}^{-}A)$$
$$\sin A = \cos(90° - A)$$
$$\sin A = \sin(180° - A)$$
$$\sin({}^{-}A) = {}^{-}\sin A$$
$$\tan A = {}^{-}\tan(180° - A)$$
$$\sin^2 A + \cos^2 A = (\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$$
$$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$$
$$1 + \cot^2 A = \csc^2 A$$

G. Aire et volume

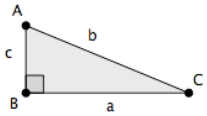
67. La formule de Héron

Pour calculer l'aire d'un triangle avec la mesure de ses trois côtés.

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

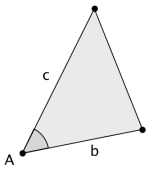
$$\text{où } p = \frac{a+b+c}{2}$$

p est le demi-périmètre du triangle.



68. Formule trigonométrique

L'aire d'un triangle peut aussi être calculée avec la formule suivante.



$$A = \frac{bc \sin A}{2}$$

69. Deux figures planes qui ont la même aire sont dites **équivalentes**.

70. Deux solides ayant le même volume sont dits **équivalents**.

H. Droites et segments

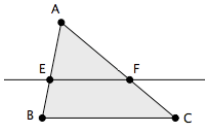
71. Deux droites **sécantes** se coupent en un seul point.

72. Deux droites **parallèles** ne se croisent jamais.

73. Deux droites **confondues** (ou superposées) sont une par-dessus l'autre. Elles se croisent un nombre infini de fois.

74. Théorème de Thalès

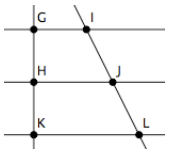
Toute droite sécante à deux côtés d'un triangle et parallèle au troisième côté forme un triangle semblable au premier.



$$\overline{EF} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \triangle\, AEF \sim \triangle\, ABC$$

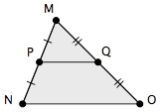
75. Théorème de Thalès

Des parallèles qui coupent des sécantes déterminent des segments de longueurs proportionnelles.



$$\overline{GI} \parallel \overline{HJ} \parallel \overline{KL} \Rightarrow \frac{m\,\overline{GH}}{m\,\overline{IJ}} = \frac{m\,\overline{HK}}{m\,\overline{JL}}$$

76. Le segment de droite qui joint le **milieu** de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté et sa mesure est la **moitié** de celle du troisième côté.

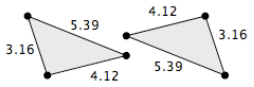


Si P et Q sont les points milieux de $\overline{MN}$ et $\overline{MO}$ alors

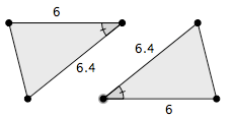
$$\overline{PQ} \parallel \overline{NO} \Rightarrow m\,\overline{PQ} = \frac{m\,\overline{NO}}{2}$$

I. Triangles isométriques

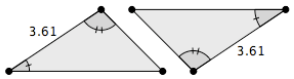
77. Deux triangles qui ont tous leurs côtés homologues congrus sont nécessairement isométriques. (**CCC**)



78. Deux triangles qui ont un angle congru compris entre des côtés homologues congrus sont nécessairement isométriques. (**CAC**)

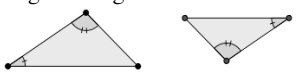


79. Deux triangles qui ont un côté congru compris entre des angles homologues congrus sont nécessairement isométriques. (**ACA**)

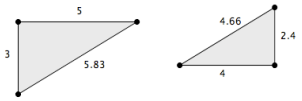


J. Figures semblables

80. Deux triangles qui ont deux angles homologues congrus sont semblables. (**AA**)

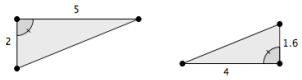


81. Deux triangles dont les mesures des côtés homologues sont proportionnelles sont semblables. (**CCC**)



$$k = \frac{2{,}4}{3} = \frac{4}{5} = \frac{4{,}66}{5{,}83}$$

82. Deux triangles possédant un angle congru compris entre des côtés homologues de longueurs proportionnelles sont semblables. (**CAC**)



$$k = \frac{1{,}6}{2} = \frac{4}{5}$$

83. Le **rapport de similitude *k*** de deux figures semblables est le rapport des mesures de deux côtés homologues.

$$k = \frac{c_2}{c_1} = \frac{P_2}{P_1}$$

84. Le **rapport des aires k^2** de deux figures semblables est le carré du rapport de similitude k.

$$k^2 = \frac{A_2}{A_1}$$

85. Le **rapport des volumes k^3** de deux solides semblables est le cube du rapport de similitude k.

$$k^3 = \frac{V_2}{V_1}$$

K. La géométrie analytique

86. La distance entre tout couple de points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ situés n'importe où dans le plan cartésien correspond à :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

87. Point milieu

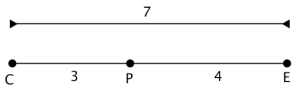
Les coordonnées x_M et y_M du point milieu d'un segment d'extrémités $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ sont :

$$(x_M, y_M) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

88. Point de partage

Le point P partage le segment CE dans le rapport 3 : 4, à partir de C.

On peut aussi dire que P est au $\frac{3}{7}$ du segment CE, à partir de C ou que P est au $\frac{4}{7}$ du segment CE, à partir de E.



$$\text{m}\,\overline{\text{CP}} = 3 \text{ et } \text{m}\,\overline{\text{PE}} = 4$$

89. Point de partage

Les coordonnées du point P situé à la fraction $\frac{a}{b}$ du segment dont les extrémités sont $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ et ce à partir du point U sont :

$$P(x, y) = \left(x_1 + \frac{a}{b}(x_2 - x_1),\ y_1 + \frac{a}{b}(y_2 - y_1)\right)$$

90. La **pente *p*** (taux de variation) d'un segment P_1P_2 est le nombre qui caractérise son inclinaison :

$$p(P_1, P_2) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

91. Tout segment d'une droite a la **même pente**.

92. La pente d'un segment ou d'une **droite horizontale** est nulle (égale à 0).

93. La pente d'une **droite verticale** est non définie.

94. Deux **droites obliques parallèles** ont la même pente.

95. Deux droites ayant la même pente et la même valeur initiale (ordonnée à l'origine) sont **confondues**, l'une par-dessus l'autre.

96. Si deux **droites** obliques sont **perpendiculaires**, alors la pente de l'une est l'opposé de l'inverse de la pente de l'autre. Le produit de ces pentes est donc $^-1$. Par exemple, si les droites d_1 et d_2 sont perpendiculaires, leur pente pourrait être $m_1 = -\frac{2}{3}$ et $m_2 = \frac{3}{2}$ (car $-\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = {}^-1$).

97. Dans la forme fonctionnelle de l'équation d'une droite $y = mx + b$, le y est isolé, le coefficient m de x est la pente de la droite et b est l'ordonnée à l'origine.

98. Dans la **forme symétrique** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$ de l'équation d'une droite, le a est l'abscisse à l'origine et le b est l'ordonnée à l'origine.
   - ✦ La pente est $-\frac{b}{a}$.

99. La **forme générale** de l'équation d'une droite est $Ax + By + C = 0$. Les coefficients A, B, et C sont des entiers.
   - ✦ L'ordonnée à l'origine est $\frac{^-C}{B}$;
   - ✦ L'abscisse à l'origine est $\frac{^-C}{A}$;
   - ✦ La pente est $\frac{^-A}{B}$.

100. La formule de la **distance d'un point** $P_1(x_1, y_1)$ **à une droite** oblique e d'équation $Ax + By + C = 0$ est celle-ci :

$$d(P_1, e) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

101. La **distance d'un point** $P_1(x_1, y_1)$ **à une droite** oblique d d'équation $y = mx + b$ peut-être calculée à l'aide de la formule :

$$d(P_1, d) = \frac{|mx_1 - y_1 + b|}{\sqrt{m^2 + 1}}$$